**Лабораторная работа № 4**

*Статистические методы поиска*

**Цель работы**

Ознакомиться со статистическими методами поиска при реше­нии задач нелинейного программирования. Изучить методы случайного поиска при определении глобального экстремума функции.

**Методические указания**

Статистические методы поиска иногда делят на 2 вида: ненаправленный и направленный поиск. Ненаправленный случайный поиск используется чаще всего для определения глобального экстремума задачи нелинейного программи­рования. В этом случае последующие испытания проводятся совер­шенно независимо от результатов предыдущих. В допустимой области генерируются случайные точки, в которых вычисляются значения целевой функции. В простейшем случае генерация осуществляется по равномерному закону в -мерном гиперпрямоугольнике. Если задача с ограничениями, то допустимая область вписывается в гиперпрямоугольник, и оставляются только те точки, которые попада­ют в допустимую область. В направленном случайном поиске отдельные испытания связа­ны между собой. Результаты уже проведенных испытаний исполь­зуются для проведения последующих. Сходимость таких методов значительно выше, но приводят они только к локальным решениям. Примерами таких методов являются алгоритм с парной пробой, алгоритм наилучшей пробы, в котором генерируются случайные точки на сфере и спуск осуществляется в "наилучшем" направлении, алгоритм статистического градиента, алгоритм наилучшей пробы с направляющим гиперквадратом.

При тестировании реализованных алгоритмов желательно фиксировать начальное значение генератора случайных чисел. Это позволит повторить работу алгоритма при повторном запуске программы.

## Простой случайный поиск

Пусть нам необходимо решить задачу минимизации функции  на заданной области .

В заданной области по равномерному закону выбираем случайную точку  и вычисляем в ней значение функции . Затем выбираем таким же образом случайную точку  и вычисляем . Запоминаем минимальное из этих значений и точку, в которой значение функции минимально. Далее генерируем новую точку. Делаем  экспериментов, после чего лучшую точку берем в качестве решения задачи (точку, в которой функция имеет минимальное значение среди всех “случайно” сгенерированных).

Оценим число экспериментов, необходимое для определения решения (точки минимума) с заданной точностью в -мерном прямо­угольнике, . Пусть  - размерность вектора переменных. Объем -мерного прямо­угольника, в котором ведется поиск минимума,

.

Если необ­ходимо найти решение с точностью , , по каждой из переменных, то мы должны попасть в окрестность оптимальной точки с объемом

.

Вероятность попадания в эту окрестность при одном испытании равна . Вероятность непопадания равна . Испытания независимы, поэтому вероятность непопадания за  экспериментов равна .

Вероятность того, что мы найдем решение за  испытаний:

.

Отсюда нетрудно получить оценку необходимого числа испытаний  для определения минимума с требуемой точностью:

.

Данный алгоритм позволяет найти глобальный экстремум в заданной области. Рассмотрим другие подходы к поиску глобального экстремума.

**Алгоритмы глобального поиска**

**Алгоритм 1**. В допустимой области  случайным образом выбирают точку . Приняв эту точку за исходную и используя некоторый детерминированный метод или алгоритм направленного случайного поиска, осуществляется спуск в точку локального минимума , в области притяжения которого оказалась точка .

Затем выбирается новая случайная точка  и по той же схеме осуществляется спуск в точку локального минимума , и т.д.

Поиск прекращается, как только некоторое заданное число  раз не удается найти точку локального экстремума со значением функции, меньшим предыдущих.

**Алгоритм 2**. Пусть получена некоторая точка локального экстремума . После этого переходим к *ненаправленному случайному* поиску до получения точки  такой, что .

Из точки  с помощью детерминированного алгоритма или направ­ленного случайного поиска получаем точку локального экстремума , в которой заведомо выполняется неравенство .

Далее с помощью случайного поиска определяем новую точку , для которой справедливо неравенство , и снова спуск в точку локального экстремума , и т.д.

Поиск прекращается, если при генерации некоторого предельного числа новых случайных точек  не удается найти лучшей, чем предыдущий локальный экстремум, который тогда и принимается в качестве решения.

**Алгоритм 3**. Пусть  – некоторая исходная точка поиска в области , из которой осуществляется спуск в точку локального экстремума  со значением . Далее из точки  движемся либо в случайном направлении, либо в направлении  до тех пор, пока функция снова не станет убывать (выходим из области притяжения ).

Полученная точка  принимается за начало следующего спуска. В результате находим новый локальный экстремум  со значением функции .

Если , точка  забывается и ее место занимает точка . Если , то возвращаемся в точку  и движемся из нее в новом случайном направлении.

Процесс прекращается, если не удается найти лучший локальный минимум после заданного числа попыток  или не удается найти “случайного” направления, в котором функция снова начинает убывать.

Такой подход позволяет найти глобальный экстремум в случае многосвязных допустимых областей.

**Порядок выполнения работы**

1. Разработать программу для решения задачи поиска глобального экстремума с использованием **метода простого случайного поиска и трех алгоритмов глобального поиска**.
2. Исследовать метод простого случайного поиска глобального экстремума при различных  и . Результат представить в таблице:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

1. Исследовать алгоритмы поиска глобального экстремума. Сравнить результаты поиска по количеству вычислений функции и найденной точке экстремума. Исследование провести при различных значениях числа попыток .

**Варианты заданий**

Условие задачи:

Найти **максимум** заданной функции:



на области , .

Варианты:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№ варианта** |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **1** | 5 | 5 | 3 | 6 | 2 | 3 | -9 | -10 | 8 | -6 | -9 | 1 | -3 | -1 | 8 | -5 | -3 | 5 |
| **2** | 2 | 4 | 2 | 6 | 2 | 3 | -3 | -6 | 2 | 6 | -3 | 8 | 6 | -8 | -8 | 8 | -4 | -1 |
| **3** | 6 | 2 | 4 | 2 | 8 | 8 | -3 | 4 | -8 | -6 | 3 | -6 | 9 | -7 | 3 | -9 | -2 | -8 |
| **4** | 4 | 9 | 1 | 7 | 5 | 6 | 7 | -9 | 6 | -8 | -10 | -2 | 9 | -1 | 5 | -2 | -8 | -4 |
| **5** | 1 | 2 | 10 | 5 | 7 | 9 | 0 | 0 | 3 | -7 | 6 | 6 | -1 | -4 | -2 | -6 | -10 | 1 |
| **6** | 7 | 9 | 10 | 6 | 5 | 7 | -6 | -7 | 8 | -9 | 9 | 0 | 9 | 7 | -8 | 3 | 8 | 7 |
| **7** | 2 | 3 | 8 | 3 | 2 | 8 | 3 | -5 | 0 | 3 | -4 | 6 | -4 | -6 | -1 | 7 | 0 | 5 |
| **8** | 2 | 1 | 7 | 2 | 8 | 4 | 5 | 2 | -9 | 0 | -3 | -3 | 4 | 0 | -6 | -3 | 7 | 3 |
| **9** | 10 | 9 | 7 | 9 | 3 | 10 | -5 | 8 | -8 | 0 | -10 | 5 | -1 | -9 | -4 | 3 | 1 | 0 |
| **10** | 9 | 2 | 2 | 1 | 9 | 5 | -6 | -7 | -8 | 6 | 6 | 9 | 7 | 5 | 0 | 4 | -9 | -2 |
| **11** | 4 | 9 | 8 | 4 | 8 | 8 | -9 | 9 | -10 | -3 | -2 | -9 | 4 | 8 | -2 | -2 | -7 | 0 |
| **12** | 10 | 2 | 10 | 4 | 5 | 3 | 3 | 6 | -10 | 6 | -6 | -1 | 4 | 5 | -1 | 8 | -2 | -1 |

**Содержание отчета**

Отчет должен содержать:

* титульный лист;
* цель работы;
* задание;
* таблицы с результатами проведенных исследований;
* выводы об эффективности реализованных алгоритмов глобального поиска, их трудоёмкости.

**Контрольные вопросы**

1. Алгоритм простого случайного поиска.
2. Алгоритм с парной пробой.
3. Алгоритм статистического градиента.
4. Алгоритм наилучшей пробы с направляющим гиперквадратом.
5. Алгоритмы глобального поиска.